

Hauptseminar Quanteninformationsverarbeitung

Universität Ulm



Manipulation von verschränkten Atomen und Photonen in einem Hohlraumresonator

Michael-Stefan Rill
michael-stefan.rill@student.uni-ulm.de

2. Oktober 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Grundprinzipien	2
2	Der Versuchsaufbau	4
2.1	Die Atomstrahlquelle [O]	5
2.2	Geschwindigkeitsselektiver Bereich [V]	5
2.3	Präparation des zirkularen Rydberg-Zustandes [Z]	5
2.4	Der Hohlraumresonator [C]	5
2.5	Ramsey-Interferometer [R ₁ und R ₂]	8
2.6	Die Detektoren [D ₁ und D ₂]	9
3	Die Rabi-Oszillationen	11
4	Experimente	15
4.1	Erzeugung eines EPR-Paares	15
4.2	Quantengatter (Quantum Phase Gate)	17
4.2.1	Versuch zu Gleichung (19)	19
4.2.2	Versuch zu Gleichung (20)	23
4.2.3	Absorptionsfreie Messung eines Photons (QND)	24
4.3	Kontrollierte Verschränkung dreier Quantensysteme	24
4.4	Weitere Anwendungen der Cavity-QED-Methode	26
5	Zusammenfassung und Fazit	27
6	Anhang: Berechnung von P_{g2} aus Abschnitt 4.2.1	28
6.1	1. Fall: $ Cavity\rangle = 1\rangle$	28
6.2	2. Fall: $ Cavity\rangle = 0\rangle$	29

Zirkulare Rydberg-Atome haben eine ausgesprochen lange Lebensdauer und sind stark an Strahlung im Millimeter-Bereich gekoppelt. Kombiniert mit einem hochqualitativen, supraleitenden Hohlraumresonator sind sie unverzichtbare Werkzeuge für die Quantenelektrodynamik geworden. Sie erlauben die Erforschung fremdartiger, quantenmechanischer Phänomene, wie z.B. die Verschränkung von Quantensystemen.

1 Einleitung und Grundprinzipien

Möglicherweise kennen Sie schon zwei praktische Ansätze zur Realisierung eines Quantencomputers, die Ionenfalle und die Kernspinresonanzmethode, auch NMR genannt. Im folgenden wird Ihnen eine weitere, ebenfalls vielversprechende Technologie vorgestellt: Die Manipulation von verschränkten Atomen und Photonen in einem Hohlraumresonator.

Zur Zeit beschäftigt sich vor allem das „*Département de Physique de l’Ecole normale supérieure*“ (Laboratoire Kastler-Brossel) in Frankreich mit diesem Thema. Besonders zu erwähnen sind dabei die Wissenschaftler Raimond, Brune und Haroche.

Im weiteren Verlauf werde ich Ihnen eine ausführliche Beschreibung des Versuchsaufbaus geben und Ihnen die Funktionsweise der einzelnen Komponenten näher erläutern. Danach werden wir uns mit einigen Experimenten beschäftigen, deren Ergebnisse diskutieren und uns abschließend einen Überblick über zukünftige Ziele und Möglichkeiten verschaffen.

Doch zunächst noch ein paar Worte zu den Grundprinzipien der Hohlraum-Quantenelektrodynamik: Wie der Titel schon sagt, ist, wie bei fast allen Experimenten zur Quanteninformation, auch bei diesem die Erzeugung verschränkter Quantensysteme von fundamentaler Wichtigkeit. Die Hauptgründe dafür sind:

1. Die Erzeugung und Manipulation verschränkter Quantensysteme ist für die Rechnung mit Quantenbits, kurz QuBits, elementar nötig. Im Gegensatz zu Computer-Bits können Quantenbits nicht nur die beiden klassischen Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ annehmen, sondern auch beliebige lineare Superpositionen dieser Basiszustände (also $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$; wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). Das Rechnen mit Quantenbits ermöglicht unter Umständen ein exponentiell schnelleres Arbeiten als mit binären Computer-Bits. Geeignete Algorithmen können deshalb diverse, zeitaufwendige Problemstellungen der Informatik und Mathematik wesentlich schneller lösen. Besonders zu erwähnen ist dabei der Algorithmus zur Faktorisierung großer Zahlen von Shor und der Algorithmus von Grover, der eine Datenbanksuche verkürzen soll. Als Rechenoperationen verwendet man die sogenannten 2-Bit-Quantengatter, auf die ich im Abschnitt 4.2 noch genauer eingehen will.
2. Bei zwei verschränkten Systemen dient eines davon als mikroskopischer Messapparat des anderen, da jedes der beiden Systeme auch Informationen über das andere mit sich trägt. Jetzt könnte man sich fragen: „Wozu ist das nötig?“ Wie schon erwähnt, ist die Tatsache, dass Quantensysteme Superpositionen von klassischen Zuständen annehmen können, von ausgesprochener Wichtigkeit. Doch bei jeder Messung einer Superposition mit einem makroskopischen Detektor nimmt das Quantensystem wieder einen eindeutigen klassischen Zustand an. Man sagt auch: „Bei der Messung verschränkt die mikroskopische Probe

mit dem makroskopischen Messapparat.“ Dieser Sachverhalt ist unter dem Begriff der Dekohärenz bekannt. Unser Messapparat soll aber genaue Messwerte, d.h. auch Informationen über die Superposition, für den Zustand einzelner Atome und Photonen liefern und den Zustand der Probe so wenig wie möglich verändern. Folglich sollte er idealerweise ebenfalls nur atomare Größe haben, so dass der Verschränkungsvorgang bei der Messung kontrolliert abläuft.

3. Nicht zu vergessen ist natürlich die Bedeutung der Verschränkung für die Quantenteleportation und die Kryptographie.

Wie wird aber solch ein verschränktes System erzeugt und verändert? Leider sind solche komplex-verschränkten Systeme technisch nicht so einfach zu realisieren. Das Problem fängt schon bei der Präparation der Anfangszustände an. Die Proben sollten von ihrer Umgebung völlig abgeschirmt sein, um die eben genannte Dekohärenz zu vermeiden. Trotzdem sollten aber Gatteroperationen mit einer sehr hohen Präzision möglich sein, um beliebige Quantenalgorithmen implementieren zu können. Die Theorie des fehlertoleranten Quantenrechnens sagt voraus, dass von 100000 Operationen höchstens eine Operation fehlerhaft sein darf. Weiterhin sollten die Zustände mit hoher Effizienz detektiert werden können und QuBits einzeln adressierbar sein. Ohne diese Eigenschaften ist die Erzeugung eines Systems mit mehreren verschränkten Quanten prinzipiell nicht möglich.

Dummerweise sind diese Forderungen an das Experiment überaus hart. Es gibt zwar verschiedenste Ansätze zur Erzeugung und Manipulation komplex-verschränkter Quantensysteme, doch haben die meisten irgendwo einen entscheidenden Schönheitsfehler. In der Quantenoptik z.B. kennt man verschränkte Systeme von Photonen, die durch UV-Strahlung zufällig erzeugt werden können. Obwohl mit dieser Methode durchaus einige Erfolge zu verzeichnen sind, wie die Erzeugung eines GHZ-Triplets oder die Überprüfung der Bellschen Ungleichungen, so ist die Schaffung eines Quantengatters damit geradezu aussichtslos.

Ein Ziel ist also unter anderem die kontrollierte Erzeugung von verschränkten Zuständen. Mit der Hohlraum-Quantenelektrodynamik ist zweifelsohne ein Schritt in diese Richtung getan. Hierbei werden zwei Atome, bei denen jeweils zwei Anregungszustände klar unterschieden werden können, mittels Photon in einem Hohlraumresonator verschränkt. Dabei können die Atom-Zustände sehr rein präpariert und genau detektiert werden. Ein weiterer Vorteil ist die Tatsache, dass die einzelnen Quantensysteme mehrere Millimeter voneinander separiert werden können, was eine individuelle Adressierung erlaubt.

2 Der Versuchsaufbau

Kommen wir jetzt zum eigentlichen Versuchsaufbau. In Abbildung 1 sehen Sie die Apparatur und in Abbildung 2 eine übersichtlichere, schematische Skizze davon.

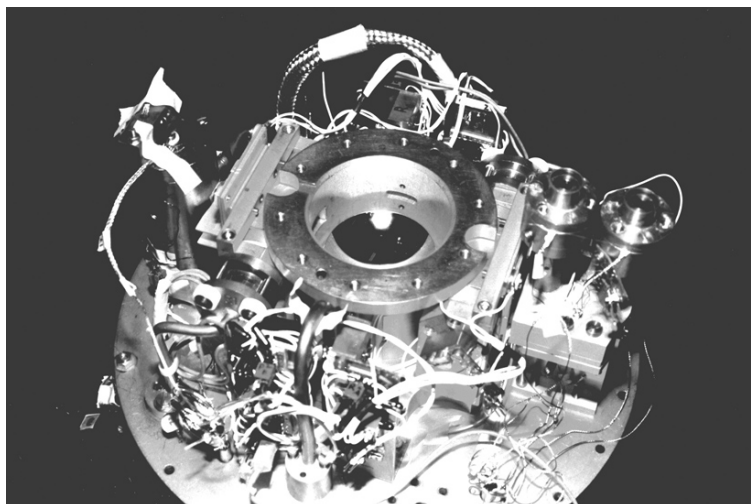


Abbildung 1: Versuchsaufbau. [4]

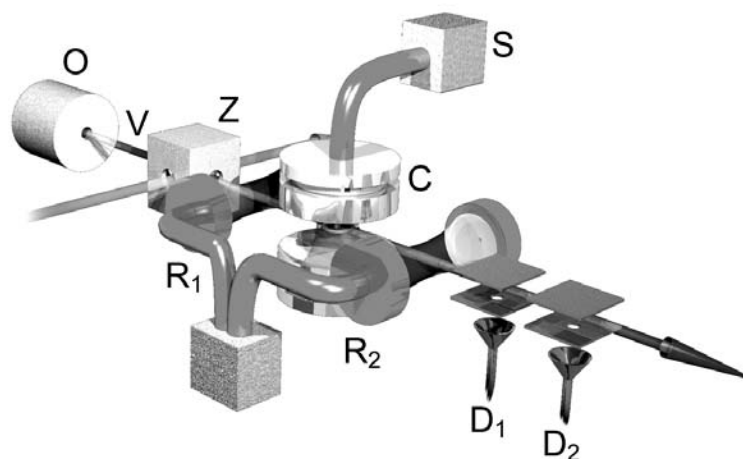


Abbildung 2: Schematische Skizze des Aufbaus. Hierbei gelten die folgenden Bezeichnungen: $O \equiv$ Atomstrahlquelle, $V \equiv$ Geschwindigkeitsselektiver Bereich, $Z \equiv$ Vorrichtung zur Präparation zirkularer Rydberg-Zustände, R_1 und $R_2 \equiv$ Ramsey-Interferometer, $C \equiv$ Cavity ohne Aluminium-Ring, $S \equiv$ Mikrowellen-Quelle, D_1 und $D_2 \equiv$ Detektoren. [4]

Wegen der hohen Sensibilität der Messung bezüglich Fremdteilchen und Temperaturschwankungen durch schwarze Strahler befindet sich die komplette Apparatur im Ultrahochvakuum bei $13,3 \mu Pa$ und wird auf eine Temperatur von $0,1 K$ gekühlt. Zusätzlich wird der Versuchsaufbau durch Helmholtz-Spulen vom Erdmagnetfeld abgeschirmt.

2.1 Die Atomstrahlquelle [O]

Zunächst betrachte man die Atomstrahlquelle O . Hier werden Rubidium-Atome in einem 160°C warmen „Ofen“ mit drei Lasern der Frequenz $3,85 \cdot 10^{14}\text{Hz}$, $3,87 \cdot 10^{14}\text{Hz}$ und $2,38 \cdot 10^{14}\text{Hz}$ in einen Rydberg-Zustand präpariert, d.h. sie erhalten eine ausgesprochen hohe Hauptquantenzahl. Im folgenden wird der Zustand mit der Hauptquantenzahl $n = 49$ als $|i\rangle$ -, mit $n = 50$ als $|g\rangle$ - und mit $n = 51$ als $|e\rangle$ -Zustand bezeichnet. Die Übergangsfrequenzen zwischen $|g\rangle$ und $|e\rangle$ betragen $51,1\text{GHz}$; die zwischen $|i\rangle$ und $|g\rangle$ $54,3\text{GHz}$ und liegen demzufolge im Mikrowellen-Bereich.

2.2 Geschwindigkeitsselektiver Bereich [V]

Die präparierten Rubidium-Atome treten nun durch ein Loch mit 1mm Durchmesser aus und kommen in den geschwindigkeitsselektiven Bereich V . Dieser Bereich ist für die Zeitabfolge des Experiments zuständig. Mit verschiedenen optischen Laser-Pump- und „Time Of Flight“-Techniken¹ können Teilchen in einem Geschwindigkeitsbereich von 100 bis $600\frac{\text{m}}{\text{s}}$ mit einem Fehler von $\pm 0,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ selektiert werden, womit die Position des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt auf $\pm 1\text{mm}$ genau bestimmt werden kann. Daher lassen sich Transformationen an dem einzelnen Atom problemlos durchführen².

2.3 Präparation des zirkularen Rydberg-Zustandes [Z]

Verlässt das Rydberg-Atom den geschwindigkeitsselektiven Bereich, so fliegt es weiter in eine Vorrichtung Z , die zusätzlich zur hohen Hauptquantenzahl auch eine hohe Drehimpulsquantenzahl präpariert. Nun ist das Atom in einem sogenannten zirkularen Rydberg-Zustand. In diesem Zustand dauert es etwa $T_{at} = 30\text{ms}$, bis das hoch angeregte Elektron des Rydberg-Atoms in den Grundzustand ($|g\rangle$ oder $|i\rangle$, je nach Experiment) zurückfällt, also wesentlich länger als bei nicht-zirkularen Rydberg-Zuständen. Folglich kann sich solch ein präpariertes Atom bis zum Zerfall ohne weiteres einige Meter vorwärts bewegen.

2.4 Der Hohlraumresonator [C]

Kommen wir nun zum Herzstück des Experiments: dem supraleitenden Hohlraumresonator (*engl.*: *Cavity*). Er bringt die Photonen der Mikrowellen mit den Rubidium-Atomen zusammen und entspricht von der Konstruktion her einem offenen Fabry-Perot-Resonator. Fabry-Perot-Resonatoren gehören zu den einfachsten optischen Resonatoren. Typisch für ihre Bauweise sind die beiden ebenen oder sphärischen Spiegel, die sich gegenüber stehen und in bezug auf eine gemeinsame optische Achse zentriert sind. Die Spiegelflächen stehen dabei senkrecht auf der optischen Achse. In diesem *Cavity*-Experiment wählt man einen sphärischen Resonator, da dieser im Gegensatz zum Planparallelen einfacher zu justieren ist und den Justierzustand länger halten kann.

¹Nähere Informationen zu diesen Techniken finden Sie auf der Internetseite <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/english/rydberg/manip/velocity.html>

²siehe dazu auch Abschnitt 4.2

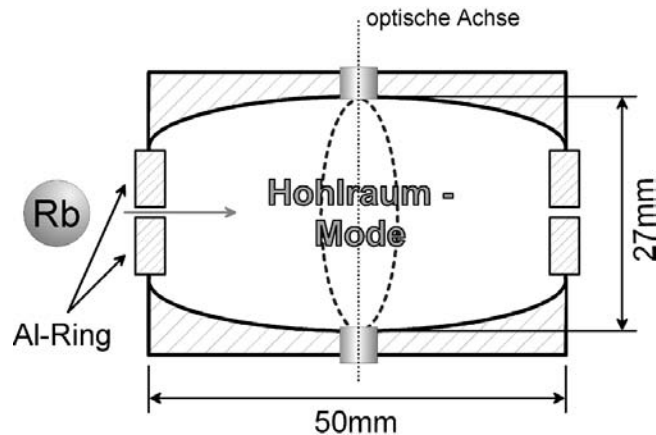


Abbildung 3: Schematischer Querschnitt durch den Hohlraumresonator C (nicht maßstabsgetreu!).

Zentrale Bestandteile der *Cavity* sind demnach die beiden absolut präzise polierten Niob-Spiegel³. Sie stehen sich im Abstand von 27mm gegenüber. Jeder von ihnen hat einen Durchmesser von 50mm und einen Krümmungsradius von 40mm , wobei sich in der jeweiligen Mitte ein Loch zum Ein- und Auskoppeln von Mikrowellen befindet. Das kohärente Mikrowellenfeld wird von der Quelle S erzeugt⁴. Aufgrund der hochgenauen Politur, die Streuprozesse so weit wie möglich unterdrückt, kann ein Mikrowellenphoton etwa 100 bis $300\mu\text{s}$ in der *Cavity* erhalten bleiben. Durch einen einfachen Trick kann diese Zeit sogar auf 1ms verlängert werden. Dabei wird ein Aluminium-Ring⁵ zwischen die Spiegel geschoben, um Photonen, die an den Unebenheiten der Spiegeloberfläche „hinausgestreut“ werden, in die Hohlraummode zurück zu reflektieren.

Vor der Benutzung des Hohlraumresonators sollte man sich folgender Probleme bewusst sein:

- Inhomogene, elektrische Streufelder an den Ein- und Austrittslöchern des Aluminiumrings (Durchmesser = 3mm) verändern die Übergangsfrequenzen der Rydberg-Zustände $|i\rangle$, $|g\rangle$ und $|e\rangle$ auf zufällige Weise und verschlechtern somit die Kohärenz der Atomstrahlen. Da die Streufelder jedoch nicht die Quantenzahlen *selbst* verändern, kann man dieses Problem umgehen, indem sämtliche Zustandsveränderungen innerhalb des Aluminiumrings vorgenommen werden.
- Weiterhin sind noch die thermisch erzeugten Photonen zu beachten. Durchschnittlich existieren bei thermischem Gleichgewicht etwa $0,7$ Photonen in der Hohlraummode. Diese müssen aber vor jeder Versuchsreihe entfernt werden. Dazu schickt man einige Atompulse im Zustand $|g\rangle$, die resonant mit der Hohlraum-Mode sind, durch den Resonator. Diese Atome absorbieren die darin enthaltenen thermischen Photonen und senken damit die effektive Feldtemperatur. Bei der Kühlung reduziert sich die Photonenzahl auf $0,1$. Das Experiment muss nach dem Kühlvorgang schnell erfolgen, da sich das thermische Feld rasch wieder aufbaut.

³Niob wird bei $T_c = 9,26\text{K}$ supraleitend.

⁴Näheres zur Erzeugung der Mikrowellenfelder finden Sie unter <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/english/rydberg/manip/microwave.html>

⁵Die Supraleitung von Aluminium setzt bei $T_c = 1,196\text{K}$ ein.

2.5 Ramsey-Interferometer [R_1 und R_2]

Zwar treffen jetzt Atom und Photon im Hohlraum-Resonator aufeinander, jedoch will man unter Umständen nicht nur Atome in Basiszuständen, sondern auch in gemischten Zuständen mit Photonen wechselwirken lassen. Also braucht man noch ein „quantenmechanisches Skalpell“, mit dem beispielsweise die Zustände $|i\rangle$ und $|g\rangle$ vor der Wechselwirkung in der *Cavity* geeignet überlagert werden können. Allein diese Manipulation ermöglicht eine Präparation und Analyse von komplex-verschränkten Zuständen. Aus diesem Grund baut man zwei Ramsey-Interferometer in das Experiment ein: kurz vor der *Cavity* C und gleich dahinter; in der Skizze 2 sind das R_1 und R_2 . Falls sich ein Aluminium-Ring zwischen den beiden Niob-Spiegeln befindet, platziert man sie kurz nach dem Eintrittsloch und kurz vor dem Austrittsloch. Im Prinzip sind R_1 und R_2 nichts anderes als zwei Hohlraumresonatoren geringer Güte, die klassische Mikrowellenpulse auf das Rydberg-Atom wirken lassen⁶. Diese Ramsey-Strahlung bleibt im Gegensatz zur Strahlung in der *Cavity* C nur relativ kurz erhalten (Nanosekunden-Bereich!). Daher findet auch keine Verschränkung von „Ramsey-*Cavity*“ und Rubidium-Atomen statt. Je nachdem, wie man die Frequenz ω_{Ramsey} nun wählt -hier z.B. nahezu resonant zum $|g\rangle$ - $|i\rangle$ -Übergang ($\omega_{\text{Ramsey}} \approx \omega_{g \leftrightarrow i}$)-, können folgende Transformationen durchgeführt werden:

- $\frac{\pi}{2}$ -Puls von R_1 :

$$|g\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |i\rangle) \quad (1)$$

$$|i\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(-|g\rangle + |i\rangle) \quad (2)$$

- $\frac{\pi}{2}$ -Puls von R_2 nach der Durchflugzeit T :

$$|g\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + e^{i\phi} |i\rangle) \quad (3)$$

$$|i\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{-i\phi} |g\rangle + |i\rangle) \quad (4)$$

wobei $\phi = (\omega_{\text{Ramsey}} - \omega_{g \leftrightarrow i}) \cdot T$. Die Transformation mit dem $\frac{\pi}{2}$ -Puls entspricht mathematisch einer Hadamard-Transformation, die ein einzelnes Atom, das sich in einem der Basiszustände befindet, in eine ausgewogene Überlagerung von $|g\rangle$ und $|i\rangle$ versetzt.

Ein Atom, das anfangs im Zustand $|g\rangle$ war und sowohl bei R_1 , als auch bei R_2 einen $\frac{\pi}{2}$ -Puls erhalten hat, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$P_g(\phi) = 1 - P_i(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) \quad (5)$$

auch wieder in $|g\rangle$ detektiert. Wie man in Abbildung 4 erkennt, ist diese Wahrscheinlichkeitsverteilung harmonisch; sie ist unter dem Begriff „*Ramsey Fringes*“ bekannt. Die Wechselwirkung der Atome mit dem Feld in C zwischen R_1 und R_2 verändert die Phase ϕ und die Amplitude der *Fringes* und gibt somit Auskunft über die Atom-Feld-Kopplung. Die Lage der *Fringes* kann

⁶Defacto heißt das: Es ist egal, wie viele Photonen sich während der Wechselwirkung in der Ramsey-*Cavity* befinden. Es kommt nur darauf an, wie lange sich das Atom darin befindet, denn auch hier findet eine Art Rabi-Oszillation wie in C statt (in unserem Fall sowohl in R_1 als auch in R_2 eine $\frac{\pi}{2}$ -Rotation).

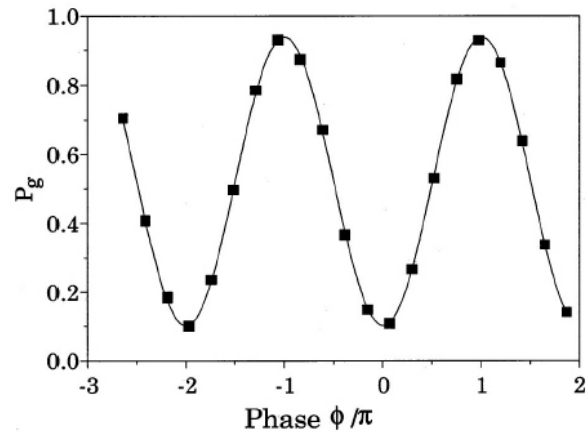


Abbildung 4: Harmonische Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Gleichung (5), engl.: *Ramsey Fringes*. [1]

mit einer Sicherheit von $\pm 25\text{Hz}$ bestimmt werden, was einer überaus hohen spektroskopischen Auflösung gleichkommt. Deshalb müssen Fluktuationen von Magnetfeldern abgeschirmt und elektrische Felder genaustens überwacht werden.

2.6 Die Detektoren [D_1 und D_2]

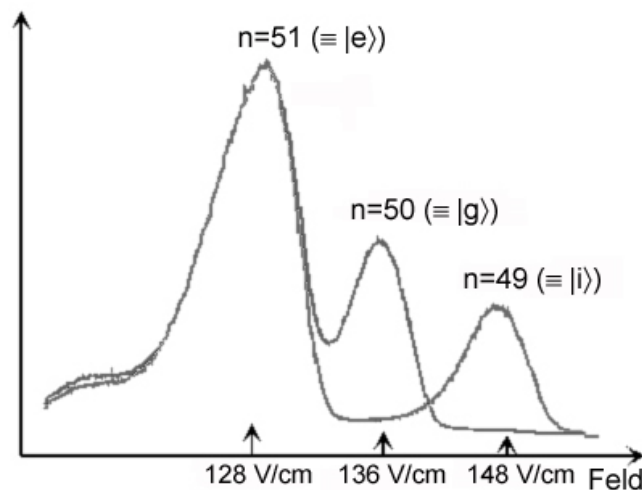


Abbildung 5: Beispielmessungen der beiden Detektoren D_1 und D_2 . [4]

Zuallerletzt trifft das Rydberg-Atom auf die eigentliche Messvorrichtung, den beiden Feld-Ionisationsdetektoren. Allein diese Messvorrichtung informiert uns über den Zustand des Systems. Ein elektrisches Feld von $150 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$ reicht nach Angaben des französischen Forscherteams aus, um die zirkularen Rydberg-Atome zu ionisieren, da das Valenz-Elektron aufgrund seines großen Abstandes zum Kern nur schwach gebunden ist. Die entrissenen Elektronen gelangen in einen Elektronen-Multiplier. Dort werden die Signale verstärkt und gezählt. Die Messung kann recht genau durchgeführt werden, da das benötigte Feld zur Ionisation von Hauptquantenzahl

zu Hauptquantenzahl sehr stark variiert -diesen Tatbestand können Sie auch der Abbildung 5 entnehmen. Zu diesem Zweck sind beim Versuchsaufbau zwei Detektoren hintereinander angebracht. Der erste Detektor ionisiert alle Atome im Zustand $|e\rangle$ ($n = 51$), der zweite entreißt danach die etwas stärker gebundenen Elektronen der Atome im $|g\rangle$ -Zustand ($n = 50$). Die Messung kann mit einer Zeitauflösung von nur $100ns$ erfolgen, wobei die Detektionseffizienz ca. 40% beträgt.

3 Die Rabi-Oszillationen

Jetzt haben Sie die wichtigsten Stationen des Versuchsaufbaus kennengelernt. Doch bevor ich Ihnen konkrete Experimente präsentiere, müssen Sie noch einen Einblick in den eigentlichen Verschränkungsmechanismus erhalten. Dazu betrachten wir einen einfachen Fall: Ein zirkulares Rydberg-Atom im Zustand $|e\rangle$ trete in den Hohlraumresonator ein, der sich zu diesem Zeitpunkt im Photonenzustand $|0\rangle$ befinden soll. Der Abstand der beiden Niob-Spiegel wird so gewählt, dass ein Photon der Energie $\hbar\omega_{e\leftrightarrow g}$ eine stehende Welle bilden kann. $E_{Photon} = \hbar\omega_{e\leftrightarrow g}$ ist auch genau die Energie, die benötigt wird, um das Atom vom Zustand $|g\rangle$ in den angeregten Zustand $|e\rangle$ zu überführen. Der anfängliche Zustand $|e, 0\rangle$ ist mit $|g, 1\rangle$ durch Dipolemission gekoppelt. $|g, 1\rangle$ heißt hier: Das Atom befindet sich in einem niedrigeren Zustand als vorher, da es ein Photon an den Hohlraum abgegeben hat. Quantitativ beschreibt der Jaynes-Cummings-Hamiltonian diesen Effekt:

$$H = \hbar\omega_{eg}\sigma_z + \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - i \frac{\hbar\Omega_{Rabi}}{2} f(x) \left(\underbrace{\sigma_+ a}_{\text{Term I}} - \underbrace{\sigma_- a^\dagger}_{\text{Term II}} \right) \quad (6)$$

Dabei beschreibt $f(x) = e^{-x^2/\xi^2}$ die Gauß-förmige⁷ Modenstruktur der *Cavity*. a und a^\dagger sind Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren der Photonen und σ_z , σ_+ und σ_- die Pauli-Matrizen des atomaren Pseudospins. Demnach bewirkt Term II, dass das Atom ein Photon an die *Cavity* abgibt und wegen der Energieerhaltung einen niedrigeren Zustand annimmt ($|e, 0\rangle \mapsto |g, 1\rangle$), während Term I das Atom durch Aufnahme des Photons wieder in den höheren Rydberg-Zustand übergehen lässt ($|g, 1\rangle \mapsto |e, 0\rangle$). Die beiden Zustände wechseln sich nun mit der Frequenz Ω_{Rabi} ab. Diesen Vorgang nennt man Rabi-Oszillation. Die Situation veranschaulichen Sie sich am besten mit zwei gekoppelten Pendeln, wobei ein Pendel das Photonen-Feld und das andere Pendel das Atom symbolisiert. Die entstehende Schwebung ist dabei gleichzustellen mit der Rabi-Oszillation.

Wenn das System, wie in unserem Fallbeispiel, in $|e, 0\rangle$ startet, dann lautet die Zustandsfunktion

$$|\Psi_e(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_{Rabi}t}{2}\right) |e, 0\rangle + \sin\left(\frac{\Omega_{Rabi}t}{2}\right) |g, 1\rangle \quad (7)$$

Offensichtlich handelt es sich hierbei um eine zeitabhängige Verschränkung zwischen Atom und Mikrowellenfeld. Demnach kann die Zustandspräparierung durch die Durchfluggeschwindigkeit des Atoms (v_{Atom}) beeinflusst werden, wobei die Dauer der Wechselwirkung zwischen Atom

⁷Die Feldverteilung einer Mode in einem offenen Resonator mit endlichen Spiegeln weicht relativ stark von der einer ebenen Welle ab, da die Amplitude zu den Spiegelrändern hin deutlich abfällt. Ebene Wellen stellen deshalb eine schlechte Approximation der Lösung der Wellengleichung dar. Man kann zeigen, dass die Grundmoden stabiler Resonatoren Gaußsche Strahlen sind („Optisch stabil“ heißt: das Stabilitätskriterium $0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_{Spiegel1}}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{R_{Spiegel2}}\right) \leq 1$, mit d = Spiegelabstand und R = Spiegelradius, wird erfüllt). Diese bezeichnen einen Wellentyp, dessen Wellenflächen in der Nähe der Ausbreitungsrichtung sphärisch sind und dessen Amplitude radial nach der Gauß-Funktion abfällt. Mit Hilfe der Wellenflächen Gaußscher Strahlen kann ein stabiler Resonator konstruiert werden, indem eine Fläche gleicher Phase (Wellenfront) durch einen sphärischen Spiegel ersetzt wird. Auf diese Weise wird der Strahl an dem Resonatorspiegel stets in sich selbst reflektiert: Die Lichtwelle läuft also in sich selbst zurück, und ihre elektrische Feldstärke verschwindet an den Spiegeln.

und Feld durch

$$t = t_{ww} = \frac{\sqrt{\pi}\xi}{v_{Atom}} \quad (8)$$

gegeben ist. Sobald das Atom die *Cavity* verlässt, wird der Zustand quasi eingefroren.

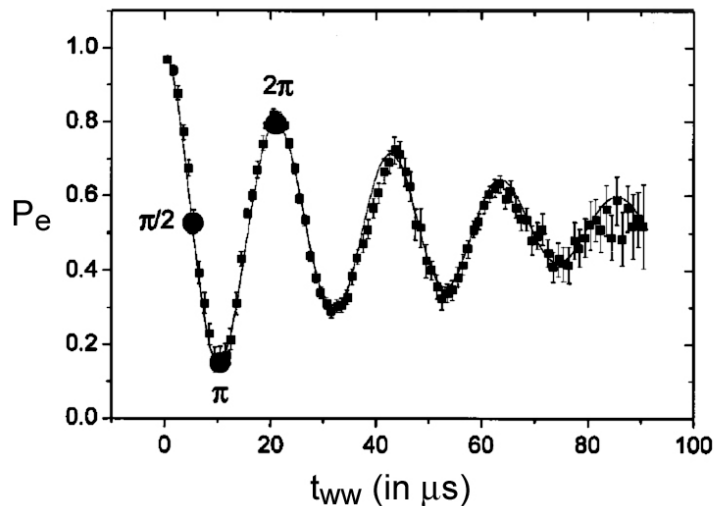


Abbildung 6: Rabi-Oszillationen. Wahrscheinlichkeit, das Atom in $|e\rangle$ zu messen, aufgetragen über die Wechselwirkungsdauer t_{ww} des Atoms mit dem Photon in der *Cavity*. [1]

Abbildung 6 zeigt die Wahrscheinlichkeit P_e , das Atom im Zustand $|e\rangle$ zu messen, aufgetragen über die Wechselwirkungsdauer t_{ww} des Atoms mit dem Photon in der *Cavity*. Theoretisch beträgt diese Wahrscheinlichkeit

$$P_e = \frac{1}{2} (1 + \cos \Omega_{Rabi} t_{ww}) \quad (9)$$

Allerdings sieht man deutlich, dass die Schwingung im realen Experiment gedämpft verläuft. Wegen technischer Mängel ist der Experimentator deshalb gezwungen, $t_{ww} < 20\mu s$ zu wählen, also das Atom höchstens eine Oszillation lang in der *Cavity* zu belassen.

Das Gleiche kann man sich auch in einem Hohlraumfeld mit z Photonen vorstellen. Allerdings ist es schwierig, einen z -Photonen-Zustand (oder Fock-Zustand⁸) herzustellen. Und auch die Zustandsformeln werden mit z Photonen nicht unbedingt einfacher:

$$\begin{aligned} |e, z\rangle \Rightarrow |\Psi_{e,z}(t_{ww})\rangle &= \cos(\Omega_{Rabi} \sqrt{z+1} \cdot t_{ww}/2) |e, z\rangle \\ &+ \sin(\Omega_{Rabi} \sqrt{z+1} \cdot t_{ww}/2) |g, z+1\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

Jetzt bleibt noch die Frage zu klären: „Welche Zeiten t_{ww} , bzw. welche Rabi-Frequenzen haben welchen Effekt auf das Atom-Feld-System?“ Oder anders gefragt: „Welche Art von Wechselwirkung zwischen Rydberg-Atom und Mikrowellenfeld erhalte ich, wenn das Atom die Durchfluggeschwindigkeit v_{Atom} hat?“

⁸Der Fock-Zustand entspricht der Anzahl an Photonen im Resonator.

- Wenn die Parameter so gewählt werden, dass $\Omega_{Rabi} \cdot t_{ww} = \frac{\pi}{2}$ ist, so findet die folgende Transformation statt:

$$|e, 0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle + |g, 1\rangle) \quad (11)$$

Das entspricht in der Sprache der Pseudospins einem EPR-Zustand. Der Verschränkungsvorgang ist laut Ref. [1] nach $5\mu s$ abgeschlossen. Die Verschränkung selbst dauert solange an, bis das Photon den Hohlraumresonator verlässt (ca. $1ms$).

- Ist hingegen $\Omega_{Rabi} \cdot t_{ww} = \pi$, so transformiert sich der Zustand $|e, 0\rangle$ in den nicht-verschränkten Zustand $|g, 1\rangle$ und aus dem anfänglichen Zustand $|g, 1\rangle$ wird $-|e, 0\rangle$. Hat das Atom vor der π -Rabi-Rotation einen gemischten $|e\rangle$ - $|g\rangle$ -Zustand, so wird am Schluss der Detektor das Atom in $|g\rangle$ messen und im Hohlraumresonator eine Überlagerung von $|0\rangle$ - $|1\rangle$ -Photon-Zuständen hinterlassen. In Formeln:

$$(A|e\rangle + B|g\rangle)|0\rangle \mapsto |g\rangle(A|1\rangle + B|0\rangle) \quad (12)$$

dabei sind A und B Wahrscheinlichkeitsfaktoren mit $|A|^2 + |B|^2 = 1$. Betrachten Sie die Gleichung (12) einmal genauer, so können Sie feststellen, dass eine π -Rotation nichts anderes bewirkt, als den Zustand des Atoms auf den Zustand des Photons abzubilden. Mit dieser Methode ist man in der Lage, das Feld in der *Cavity* zu präparieren oder indirekt zu messen.

- Und dann wäre da noch der Fall, wo $\Omega_{Rabi}t_{ww} = 2\pi$ ist. Das Atom-Feld-System entwickelt sich dann folgendermaßen:

$$|e, 0\rangle \mapsto -|e, 0\rangle \quad (13)$$

$$|g, 1\rangle \mapsto -|g, 1\rangle \quad (14)$$

$$|g, 0\rangle \mapsto |g, 0\rangle \quad (15)$$

Eine volle Periode der Rabi-Oszillation entspricht demnach einer Phasenverschiebung um π . Da ein Atom in $|g, 0\rangle$ von dieser Atom-Feld-Kopplung nicht im geringsten beeinflusst wird, findet die Phasenverschiebung eines Atoms im Anfangszustand $|g\rangle$ nur in Anwesenheit eines Photons im Resonator statt. Diese Tatsache wird noch für die Quantengatter von großer Bedeutung sein.

Wie Sie sehen, haben wir alle Zutaten für eine kontrollierte Verschränkung von Atomen mit Mikrowellen beisammen.

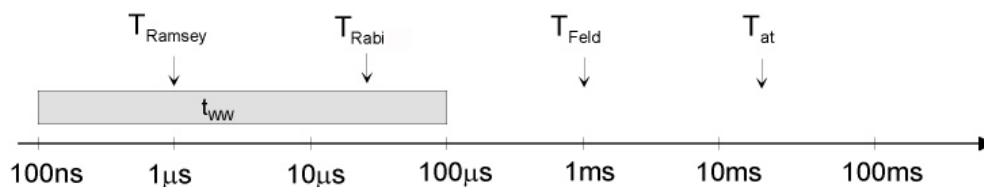


Abbildung 7: Maximal mögliche Zeitauflösung der Präparationsschritte (logarithmische Skala!)

An dieser Stelle sei noch eine sehr wichtige Bemerkung angebracht: Zustandsmanipulationen dieser Art sind in der Praxis nur deshalb möglich, weil der zeitliche Ablauf der einzelnen Präparationsschritte hervorragend abgestimmt ist. In Abbildung 7 sehen Sie eine Grafik, die Ihnen einen Überblick über alle relevanten Zeitzeonen vermittelt. T_{at} ist darin die Zeitdauer, nach der das angeregte Elektron eines zirkularen Rydberg-Atoms in den Grundzustand zurückfällt. Das Photon bleibt aus den vorhin genannten Gründen $T_{Feld} = 1ms$ im Hohlraum erhalten. T_{Rabi} ist die Periodendauer einer 2π -Rabi-Rotation. Und T_{Ramsey} ist die typische Dauer eines Ramsey-Pulses. Der Wechselwirkungszeitraum eines Atoms mit dem Feld variiert größenordnungsmäßig zwischen $100ns$ und $100\mu s$. Man beachte, dass T_{at} und T_{Feld} wesentlich größer als T_{Rabi} sind. Nur aus diesem Grund sind die nachfolgenden Experimente überhaupt durchführbar!

4 Experimente

4.1 Erzeugung eines EPR-Paares

Nachdem wir uns bisher nur mit grundsätzlichen Eigenschaften der *Cavity*-Anordnung beschäftigt haben, stelle ich Ihnen jetzt die erste wichtige Anwendung vor: Die Erzeugung eines **E**instein-**P**odolsky-**R**osen-Paares⁹.

Das Prinzip dieses Versuchs ist eigentlich recht einfach. Man nehme zwei, zunächst unabhängige Atome und schicke sie nacheinander durch den Hohlraumresonator. Dort werden beide Atome mittels eines Photons aus der *Cavity* indirekt miteinander verschränkt. Bestimmt der Detektor den Zustand des ersten Atoms, so wird zeitgleich der Zustand des zweiten Atoms festgelegt.

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel: Zunächst sei die *Cavity* resonant zum $|e\rangle$ - $|g\rangle$ -Übergang und es soll sich kein Photon darin befinden. Nun werden zwei Rydberg-Atome nacheinander losgeschickt; dabei soll das erste Atom in $|e\rangle$ und das zweite in $|g\rangle$ präpariert sein. Somit lautet der Anfangszustand $|\Psi_0\rangle = |e_1, g_2, 0\rangle$.

Kommt das erste Atom beim Resonator an, so bleibt es solange darin, bis eine $\frac{\pi}{2}$ -Rabi-Rotation stattgefunden hat, dann nämlich besteht eine 50/50-Wahrscheinlichkeit, das System in $|e, 0\rangle$ oder $|g, 1\rangle$ zu messen. Die Aufenthaltsdauer t_1 des Atoms in der *Cavity* hängt von der Wahl der Anfangsgeschwindigkeit ab. Diese wird im geschwindigkeitsselektiven Bereich festgelegt (siehe dazu Abschnitt 2.2). Bis das zweite Atom beim Resonator eintrifft, lässt sich das gesamte System durch

$$|\Psi_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1, g_2, 0\rangle + |g_1, g_2, 1\rangle) \quad (16)$$

beschreiben, was einer maximalen Verschränkung von Atom₁ und dem *Cavity*-Feld entspricht. Nach einem Zeitintervall T tritt auch das zweite Atom in die *Cavity* ein. Dort soll es $t_2 = 2t_1$ lang bleiben, bis es sich einer π -Rabi-Rotation unterzogen hat¹⁰. Wenn das erste Atom das Photon „mitgenommen“ hat, so bleibt das zweite Atom im Zustand $|g\rangle$, andernfalls absorbiert das zweite Atom mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit das Photon und wird folglich im Zustand $|e\rangle$ detektiert. Das System wird also durch die folgende Formel beschrieben:

$$|\Psi_{EPR}\rangle |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1, g_2\rangle - |g_1, e_2\rangle) |0\rangle \quad (17)$$

Dies entspricht einer maximalen Atom₁-Atom₂-Verschränkung. Wie Sie sehen, weist unser System die gleichen typischen Haupteigenschaften auf, wie die heutzutage gängige Definition eines EPR-Paares; man hat es hier lediglich nicht mit Polarisationswinkeln oder Spins, sondern mit Rydberg-Zuständen zu tun.

1997 wurde das Experiment von Hagley und Maître durchgeführt, damals jedoch ohne Aluminium-Ring. Demzufolge konnte das Photon nur etwa $112\mu\text{s}$ als Hohlraummode existieren.

⁹Eigentlich handelt es sich hier um einen Bell-Zustand. Es hat sich jedoch in den letzten Jahren der Begriff „EPR-Paar“ eingebürgert, obwohl in der Veröffentlichung von 1935, auf die sich jener Begriff bezieht, nicht direkt von diesen Zuständen gesprochen wird.

¹⁰Der überlagerte $|0\rangle$ - $|1\rangle$ -Photonen-Zustand wird somit auf das zweite Atom abgebildet.

Sehen wir uns jetzt die Durchführung dieses Versuches einmal genauer an: Als erstes müssen verschiedene Komponenten justiert werden, um die Durchflugzeit für die $\frac{\pi}{2}$ - und π -Rabi-Rotation festzulegen. Dann werden im zeitlichen Abstand von $1,5ms$ die Atome paarweise losgeschickt. Das erste Teilchen betritt die *Cavity* mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 337\frac{m}{s}$. $26\mu s$ danach trifft auch das zweite Teilchen mit $v_2 = 432\frac{m}{s}$ ein und beide verschränken zu einem EPR-Paar. Dieser Vorgang wiederholt sich etwa 1000mal und man erhält das folgende Ergebnis:

- Die Wahrscheinlichkeit, das erste Atom in $|e\rangle$ und das zweite in $|g\rangle$ zu finden, beträgt $P_{eg} = 0,44$,
- das erste im Zustand $|g\rangle$ und das zweite im Zustand $|e\rangle$ zu finden, $P_{ge} = 0,27$.
- Die Wahrscheinlichkeiten, beide Atome im gleichen Zustand zu beobachten, sind $P_{gg} = 0,23$ und $P_{ee} = 0,06$. In diesen Fällen hat keine Verschränkung stattgefunden!

Diese Ergebnisse weichen deutlich von den idealen, theoretischen Werten ab! Eigentlich sollte man $P_{eg} = P_{ge} = 0,5$ und $P_{ee} = P_{gg} = 0$ finden. Dabei setzt man jedoch voraus, dass das Photon im Resonator während des Eintrittszeitraums $T = 26\mu s$ beider Atome nicht verschwindet. Das geschieht jedoch manchmal in der Praxis, und wie wir wissen, findet ohne Photon keine Verschränkung statt. Außerdem spielen noch Ungenauigkeiten des Detektionssystems eine nicht vernachlässigbare Rolle. Trotz alledem kann man ruhigen Gewissens sagen, dass die Verschränkungsmaschine funktioniert, zumal uns die experimentellen Schwächen bewusst sind.

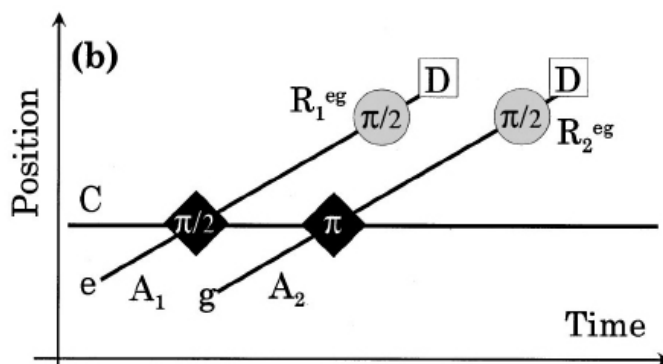


Abbildung 8: Zeitliche Abfolge zur Erzeugung von EPR-Paaren: 2. Versuchsreihe mit einem $\frac{\pi}{2}$ -Ramsey-Puls. Runde Grafikelemente symbolisieren Ramsey-Pulse; dunkle, eckige Grafikelemente symbolisieren Rabi-Rotationen. [1]

In der zweiten Versuchsreihe wirkt jetzt auf beide Atome ein $\frac{\pi}{2}$ -Ramsey-Puls. Die Geschwindigkeiten betragen jetzt $v_1 = 413\frac{m}{s}$ und $v_2 = 400\frac{m}{s}$. Das Zeitintervall zwischen dem Eintritt von Atom₁ und Atom₂ in den Hohlraumresonator beträgt $T = 37\mu s$, und die beiden Teilchen haben während des Experiments einen maximalen Abstand von $1,5cm$. In der Abbildung 9 sehen Sie ein Diagramm der gemessenen Werte. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, das zweite Atom im Zustand $|e\rangle$ zu messen, wenn das erste in $|e\rangle$ ($\Rightarrow P_1$) oder $|g\rangle$ ($\Rightarrow P_2$) bestimmt wird, über die Frequenz des Ramsey-Pulses ν aufgetragen. Sobald der Zustand des ersten Atoms bestimmt wird, ist der Zustand des zweiten automatisch festgelegt.

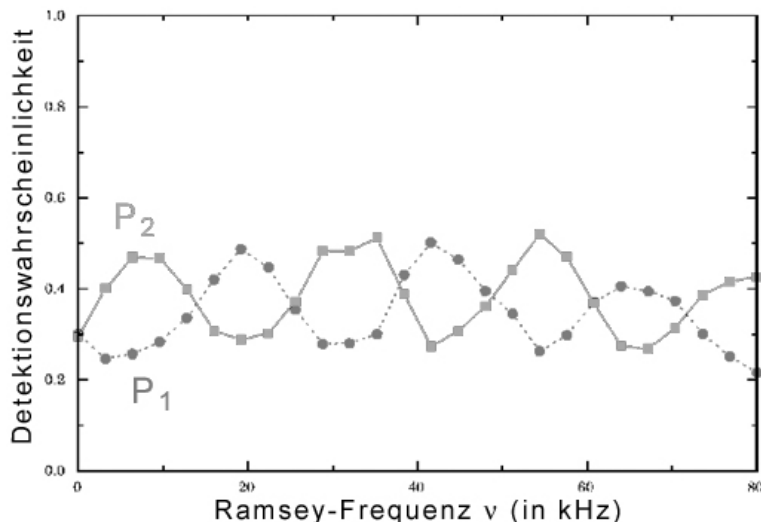


Abbildung 9: Messergebnis der 2. Versuchsreihe. Detektionswahrscheinlichkeit über die Frequenz der Ramsey-Pulse aufgetragen. [4]

Man erhält:

- $|Atom_2\rangle = |e\rangle - e^{i\phi}|g\rangle$ falls $|Atom_1\rangle = |e\rangle$ und
- $|Atom_2\rangle = |e\rangle + e^{i\phi}|g\rangle$ falls $|Atom_1\rangle = |g\rangle$

Wegen der schon vorhin genannten Schwächen der Apparatur weicht das höchste Maximum der Wahrscheinlichkeitsoszillation stark vom idealen Wert ab; es beträgt nur etwa 25% davon. Deshalb ist es auch bis heute noch nicht gelungen, die Bellschen Ungleichungen zu verifizieren. Mit Hilfe von *Cavities* höherer Güte und effizienteren Ramsey-Pulsen erhoffen sich die Wissenschaftler ein eindeutigeres Ergebnis.

4.2 Quantengatter (Quantum Phase Gate)

Nun widmen wir unsere Aufmerksamkeit den Quantengattern. Zunächst will ich aber einen kleinen Ausflug in die Grundlagen der Informatik machen, so dass Sie den Begriff „Gatter“ besser einordnen zu können.

Das QuBit haben wir bereits in Abschnitt 1 als die kleinste Speichereinheit kennen gelernt, die im Gegensatz zum binären Computer-Bit nicht nur die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$, sondern auch lineare Superpositionen dieser Zustände annehmen kann.

Um mit großen Zahlen rechnen zu können, reicht es natürlich nicht aus, sich auf ein einzelnes QuBit zu beschränken. Man geht folglich dazu über, mehrere QuBits aneinander zu reihen und ein sogenanntes „Quantenregister“ aufzubauen. Dieses Register kann sich dabei nicht nur, wie im klassischen Fall, in *einem* Zustand (bei einem Register, bestehend aus zwei Bits, ist dies einer der Zustände: $|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle$), sondern auch in allen möglichen Zuständen gleichzeitig befinden. Wie bei einem QuBit zerfällt die Überlagerung von Zuständen eines Registers durch die Messung mit einem makroskopischen Detektor (d.h. es kann z.B. nur $|0\rangle|1\rangle$ gemessen werden).

Nun ist es aber nicht sonderlich aufregend Qubits, bzw. Quantenregister in einen Zustand zu präparieren und danach zu messen. Wesentlich interessanter wird es, wenn die Möglichkeit besteht, Qubit-Zustände gezielt zu manipulieren. Die Manipulation soll dabei durch Elementaroperationen, auch Gatter genannt, erfolgen.

Wendet man Gatter mehrmals hintereinander in einer bestimmten Reihenfolge auf ein Register an, so lassen sich auch mathematische Funktionen realisieren. Eine Überlagerung von Zuständen bleibt dabei erhalten, und das Register enthält nach der Anwendung der Funktion nicht mehr die ursprünglichen Werte, sondern die dazugehörigen Ergebnisse. In Abbildung 10 sehen Sie ein Beispiel, wie die Funktion $F(x) = x + 1$ schematisch verwirklicht werden kann.

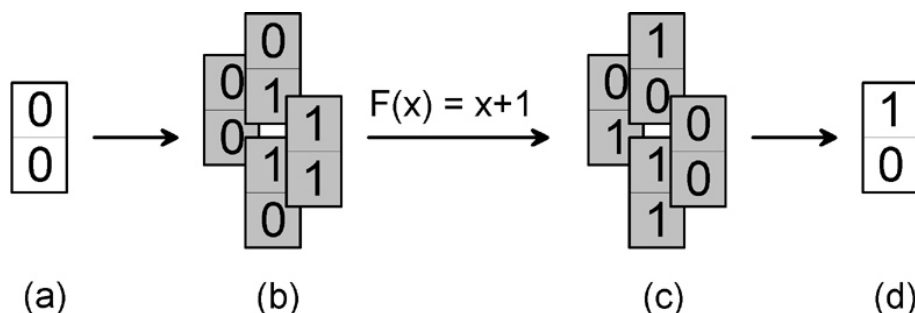


Abbildung 10: (a) Das Register, bestehend aus zwei Qubits, befindet sich im klassischen Grundzustand $|0\rangle|0\rangle$. (b) Es wird eine Superposition (dargestellt durch graue Kästen) aller möglicher Zustände erzeugt, wobei jeder Zustand gleich wahrscheinlich ist. (c) Die Funktion $F(x) = x + 1$ wurde auf das Register angewendet. Es enthält jetzt nicht mehr die ursprünglichen Werte, sondern die dazugehörigen Ergebnisse. (d) Durch die Messung nimmt das Register wieder einen klassischen Zustand an.

Um mathematische Funktionen mit der *Cavity*-Methode realisieren zu können, müssen wir zunächst wieder einen Schritt zurückgehen und mögliche Elementargatter finden. Wir unterscheiden grundsätzlich zwei Gattungen von Elementargattern: das 1-Bit- und das 2-Bit-Gatter. Das einfachste 1-Bit-Gatter erzeugt den logischen Operator „NOT“, bei dem einfach der Inhalt eines Bits invertiert wird; $|0\rangle$ wird zu $|1\rangle$ und $|1\rangle$ wird zu $|0\rangle$. Das wohl bedeutendste 2-Bit-Gatter ist das „kontrollierte NOT“ (*CNOT*). Hierbei wird ein Bit negiert, und zwar abhängig davon, ob sich das sogenannte Kontrollbit im Zustand $|1\rangle$ oder $|0\rangle$ befindet. In unserem Atom-Photon-Bild ist $|i\rangle$ gleichzusetzen mit $|0\rangle$ und $|g\rangle$ gleichzusetzen mit $|1\rangle$. Bei den Photonen entspricht in diesem Fall die Photonenzahl dem Bit-Zustand. Wenn man jetzt ein in $|i\rangle$ präpariertes Atom in den Hohlraumresonator bringt, dann wird sich sein Zustand *nicht* verändern; unabhängig davon, ob sich das Mikrowellenfeld in $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ befindet. Ist hingegen das Atom in $|g\rangle$ präpariert, so wird es nicht mehr egal sein, ob sich ein Photon in der *Cavity* befindet oder nicht. Wenn keines vorhanden ist, verharrt das Atom in $|g\rangle$. In Anwesenheit eines Photons transformiert sich der Atomzustand gemäß der Formel

$$|g, 1\rangle \mapsto \exp(i\pi) |g, 1\rangle \quad (18)$$

Wie Sie sehen, wird die Photonenzahl dabei nicht verändert.

Präparieren wir das Atom in einen kohärent-superponierten Zustand von $|i\rangle$ und $|g\rangle$ mit den jeweiligen Amplituden A und B , dann transformiert unser CNOT-Gatter nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} (A|g\rangle + B|i\rangle)|0\rangle &\mapsto (A|g\rangle + B|i\rangle)|0\rangle \\ (A|g\rangle + B|i\rangle)|1\rangle &\mapsto (e^{i\pi}A|g\rangle + B|i\rangle)|1\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

Natürlich kann man sich die Gatteroperation auch für eine Zustandsüberlagerung des Photonenfeldes anschauen. Hier lauten die Formeln:

$$\begin{aligned} |i\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) &\mapsto |i\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) \\ |g\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) &\mapsto |g\rangle(a|0\rangle + e^{i\pi}b|1\rangle) \end{aligned} \quad (20)$$

wobei a und b die jeweiligen Amplituden der einzelnen Photonenzustände sind. Sowohl in Gleichung (19) als auch in (20) sieht man eindeutig, dass sich der Zustand nur dann ändert, wenn das Atom in $|g\rangle$ und die Photonenzahl $|1\rangle$ ist.

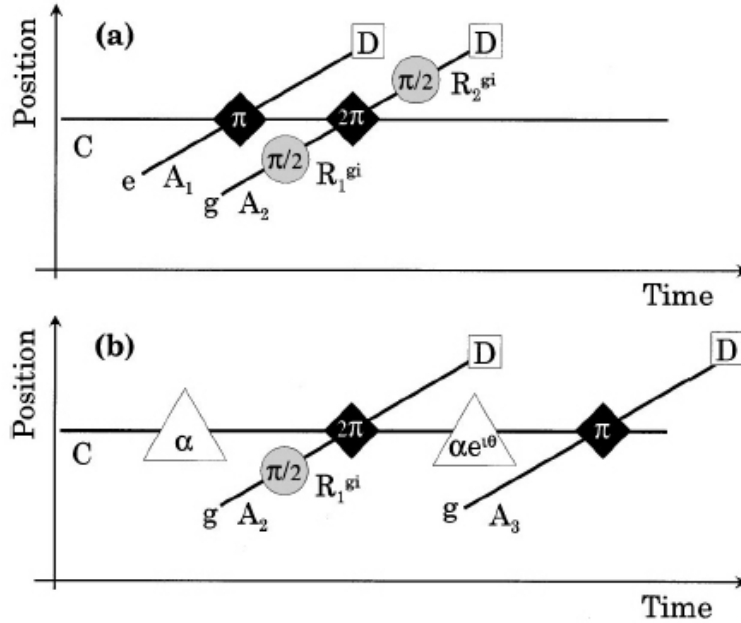


Abbildung 11: Abfolge der Quantengatter-Versuche. (a) bezieht sich auf Gleichung (19), (b) auf Gleichung (20). Runde Grafikelemente symbolisieren Ramsey-Pulse; dunkle, eckige Grafikelemente symbolisieren Rabi-Rotationen. Das zusätzliche kohärente Feld Γ wird durch Dreiecke dargestellt. [1]

4.2.1 Versuch zu Gleichung (19)

Der eigentliche Versuch läuft wie in Abbildung 11a skizziert ab. Zuerst schickt der Experimentator ein Atom im Zustand $|e\rangle$ durch die *Cavity*, um den gewünschten Feldzustand herzustellen (also $|1\rangle$). Dabei bleibt das Atom in der *Cavity*, bis eine π -Rabi-Rotation stattgefunden hat¹¹.

¹¹siehe auch Gleichung (12)

Danach schickt man ein zweites Atom im Zustand $|g\rangle$ los. Bei R_1 wird mit Hilfe des Ramsey-Pulses ein gemischter $|g\rangle$ - $|i\rangle$ -Zustand hergestellt. Das Atom bleibt dann eine volle Rabi-Rotation im Hohlraumresonator, um in R_2 mit einem weiteren $\frac{\pi}{2}$ -Puls beschossen zu werden. Um den Überblick zu bewahren, sind im Anhang nochmals alle Präparationsschritte mit den dazugehörigen Transformationen einzeln aufgelistet¹².

Das experimentelle Ergebnis ist in Abbildung 12 dargestellt. P_{g2} -die Wahrscheinlichkeit das 2. Atom in $|g\rangle$ zu messen- wird gegen die Phase $\phi = (\omega_{Ramsey} - \omega_{g\leftrightarrow i})T$ aufgetragen. Man erkennt deutlich die Phasenverschiebung $\gamma = \pi$ bei Anwesenheit eines Photons, womit die Ausgangsgleichung (19) verifiziert wurde.

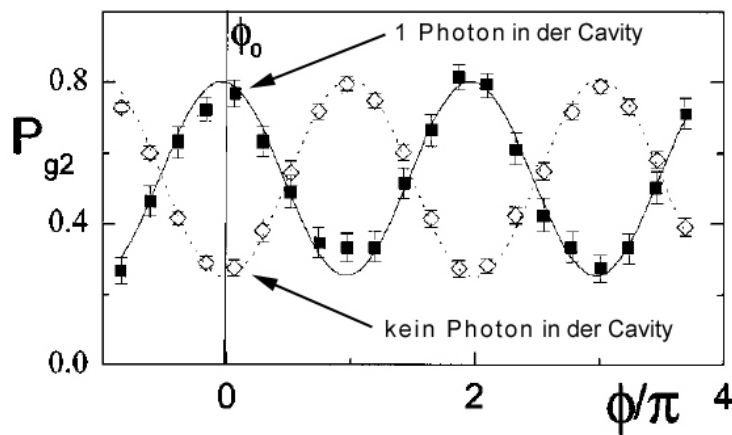


Abbildung 12: Test des Atoms auf kohärente Phasenverschiebung γ . P_{g2} ist die Wahrscheinlichkeit, Atom₂ in $|g\rangle$ zu detektieren. Die Phase ϕ setzt sich aus der Durchflugzeit T , sowie der Differenz von Ramsey-Frequenz ω_{Ramsey} und $|g\rangle$ - $|i\rangle$ -Übergangsfrequenz $\omega_{g\leftrightarrow i}$ zusammen. [1]

Mit der gleichen Versuchsanordnung kann man auch beliebige Phasenverschiebungen γ zwischen 0 und 2π erzeugen. Dazu wird die *Cavity*-Mode außer Resonanz zum $|e\rangle$ - $|g\rangle$ -Übergang um δ justiert. Die Geschwindigkeit der Atome wird dabei jedoch nicht verändert.

Die experimentellen Ergebnisse in den Abbildungen 13 und 14 zeigen, wie sich die relative Phase kontinuierlich verändert. Dabei beträgt die Phasendifferenz zwischen der Kurve in der leeren *Cavity* und der Kurve bei Anwesenheit eines Photons im ersten Fall $\gamma = 273^\circ$ ($\Leftrightarrow \frac{\delta}{2\pi} = 22kHz$), im zweiten $\gamma = 180^\circ$ ($\Leftrightarrow \frac{\delta}{2\pi} = 0kHz$) und im dritten $\gamma = 94^\circ$ ($\Leftrightarrow \frac{\delta}{2\pi} = 15,5kHz$). Weiterhin fällt bei der Betrachtung der Abbildung 13 auf, dass die Wahrscheinlichkeiten zwischen 0, 2 und 0, 8 oszillieren. Laut Theorie sollten sie sich aber zwischen 0 und 1 bewegen. Die Gründe dafür sind wieder technische Probleme. Dazu gehören unter anderem:

- Einfluss thermischer Felder auf das Experiment
- Fehldetektionen von D_1 und D_2

¹²In Abschnitt 6.1 wird die Messwahrscheinlichkeit für den Fall berechnet, dass $|Cavity\rangle = |1\rangle$ (siehe Abbildung 12: Messreihe mit den schwarzen Quadraten). In Abschnitt 6.2 wird zum direkten Vergleich der Fall $|Cavity\rangle = |0\rangle$ betrachtet.

- Die Wahrscheinlichkeit ein Photon in der *Cavity* zu haben, bevor das Präparationsatom die *Cavity* betritt. \Rightarrow Es wird ein zweites Photon vom Atom hinzugefügt. \Rightarrow Das Atom wird folglich mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit in $|e\rangle$ detektiert.

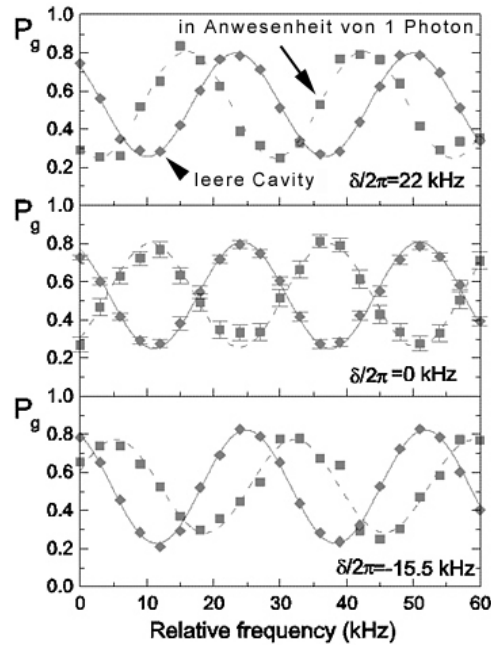


Abbildung 13: Wahrscheinlichkeit, das Atom bei bestimmten Phasendifferenzen in $|g\rangle$ zu messen. [1]

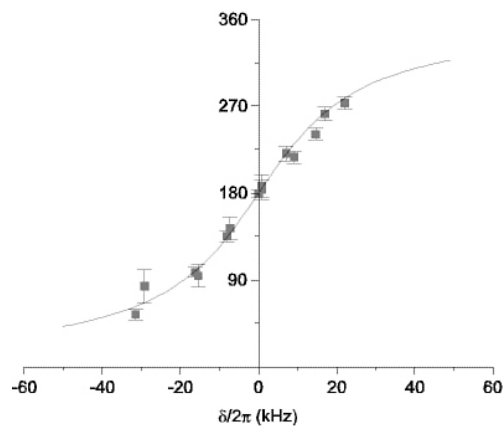


Abbildung 14: Phasenverschiebung gegen $\frac{\delta}{2\pi}$ aufgetragen (Die Verbindungskurve ist nach der Theorie berechnet). Man sieht hier deutlich die kontinuierliche Veränderung der Phase. [1]

4.2.2 Versuch zu Gleichung (20)

Das Experiment kann man laut Gleichung (20) auch andersherum durchführen, d.h. der Zustand des Atoms ist rein und das Photonenfeld im Resonator wird in einen überlagerten $|0\rangle$ - $|1\rangle$ -Zustand präpariert. Diese Versuchsreihe hat vor allem den Zweck, die Kohärenz des Quantengatters zu testen. Den zeitlichen Ablauf der Versuchsreihe sehen Sie in Abbildung 11b. Beachten Sie bitte, dass man hier kein zweites Ramsey-Interferometer R_2 benötigt. Um den gewünschten Photonenzustand herzustellen, wird in C ein zusätzliches kohärentes Feld

$$|\alpha\rangle \approx k_0 |0\rangle + \alpha |1\rangle \left(+ \sum_{n>1} k_n |n\rangle \right) \quad (21)$$

hinzugefügt (der letzte Term kann wegen der kleinen Photonenzahl $\approx 0,1$ vernachlässigt werden). Dann bringt man das Atom₂ mit Hilfe eines $\frac{\pi}{2}$ -Ramsey-Pulses in einen gemischten $|g\rangle$ - $|i\rangle$ -Zustand und lässt es eine volle 2π -Rabi-Rotation in der *Cavity* verweilen. Falls das Atom in $|i\rangle$ detektiert wird, hat sich an der Feldphase nichts geändert. Detektiert man es hingegen in $|g\rangle$, so befindet sich das Feld in einem Zustand der Form

$$k_0 |0\rangle + k_1 e^{i\phi} |1\rangle \approx |e^{i\phi} \alpha\rangle = |-\alpha\rangle \quad (22)$$

Es hat also eine Phasenverschiebung um π stattgefunden.

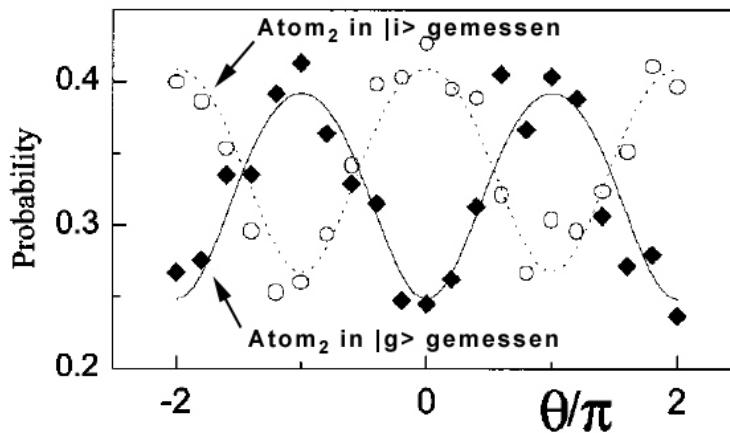


Abbildung 15: Bestimmung der Phasenverschiebung des Feldes. [1]

Doch wie kann diese Phasenverschiebung experimentell nachgewiesen werden? Dazu lässt man auf das Atom₂ hinter der *Cavity* ein weiteres Feld Γ der Amplitude $A = \alpha e^{i\Theta}$ wirken, das sich zum bereits vorhandenen Feld kohärent dazuaddiert. Nun sollte der Endzustand des Hohlraumfeldes noch ausgelesen werden. Aus diesem Grund lässt man ein 3. Atom in $|g\rangle$ in Anwesenheit eines Photons eine π -Rabi-Rotation durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit, das Atom₃ in $|e\rangle$ zu messen, ist idealerweise gleich der Wahrscheinlichkeit, ein Photon in der *Cavity* zu finden.

In der Abbildung 15 ist die Wahrscheinlichkeit, das Atom₂ in $|i\rangle$ oder $|g\rangle$ zu beobachten, gegen die Phase Θ des zusätzlichen Feldes Γ aufgetragen, wobei wir voraussetzen, dass sich Atom₃ im Zustand $|e\rangle$ befindet. Die Oszillation lässt auf Interferenzen der beiden Felder schließen. Sie sehen in der Abbildung auch deutlich die π -Phasenverschiebung, wenn Atom₂ in $|g\rangle$ gemessen wird. In diesem Fall wird bei $\Theta = 0$ von der Probe am wenigsten absorbiert.

4.2.3 Absorptionsfreie Messung eines Photons (QND)

Das Bemerkenswerte an den beiden Realisierungen eines Quantengatters ist die Tatsache, dass die Zustandsbestimmung des Mikrowellenfeldes absorptionsfrei ist, d.h. die Photonenzahl in der *Cavity* wird dadurch *nicht* beeinflusst! Das Atom fungiert als mikroskopisches Messgerät für den Photonenzustand in der *Cavity*, dessen „Ausgabewerte“ mit den Feld-Ionisationsdetektoren ausgelesen werden. Beachten Sie, dass es völlig gleichgültig ist, ob sich am Anfang und am Ende des Versuchs das gleiche Photon im Hohlraumresonator befindet. Es kommt nur auf den endgültigen Zustand an.

Im Fachjargon wird diese Messmethode als *QND* bezeichnet, was soviel bedeutet wie *Quantum Non-Demolitioning Measurement*. Eine derartige, ideale Bilderbuchmessung wurde schon in den 70er Jahren prophezeit. Jedoch erst vor wenigen Jahren ist es gelungen, mehrmals den gleichen Feldzustand zu messen. Noch eine Bemerkung: Die Phaseninformationen werden während einer *QND*-Messung vernichtet. Das bedeutet, dass ein anfangs überlagerter $|0\rangle$ - $|1\rangle$ -Photonenzustand in einen eindeutigen Fock-Zustand verwandelt wird.

4.3 Kontrollierte Verschränkung dreier Quantensysteme

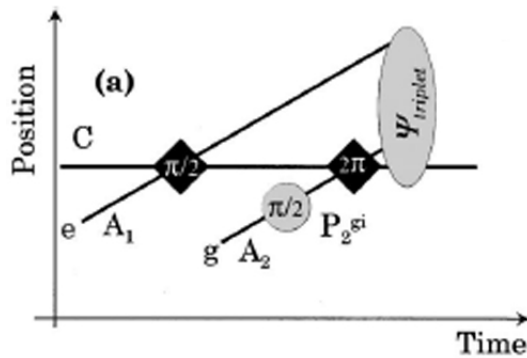


Abbildung 16: Versuchsabfolge für die Verschränkung von drei Quantensystemen. Die runden Grafikelemente symbolisieren Ramsey-Pulse, die eckigen Rabi-Rotationen. [1]

Im nächsten Schritt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob eine Verschränkung von mehr als zwei Quantensystemen möglich ist. Wie Sie ja vorher erfahren haben, beeinflusst eine Operation mit dem Quantengatter nicht den Photonenzustand in der *Cavity*. Demzufolge können prinzipiell beliebig viele Atome miteinander verschränkt werden.

Vor zwei Jahren gelang es, *drei* Atome in einen verschränkten Zustand zu präparieren. Dabei wurde eine Gatter-Operation auf ein verschränktes EPR-Paar angewandt. In der Abbildung 16 ist die Versuchsabfolge kurz skizziert. Zuerst wird das Atom₁ in $|e\rangle$ präpariert und in die *Cavity* geschickt, die vorher resonant zum $|e\rangle$ - $|g\rangle$ -Übergang justiert wurde; dort durchläuft es eine $\frac{\pi}{2}$ -Rabi-Rotation. Die dabei entstehende Atom₁-*Cavity*-Verschränkung wird durch die Gleichung (11) beschrieben. $25\mu\text{s}$ danach schickt man ein zweites Atom im $|g\rangle$ -Zustand los und lässt vor seinem Eintritt in den Resonator einen $\frac{\pi}{2}$ -Ramsey-Puls auf es wirken, so dass $|Atom_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |i\rangle)$. Da dieses Rydberg-Atom eine volle Rabi-Rotation lang im Hohlraum bleibt, spielt es bei dieser Gatteroperation die Rolle eines Kontrollbits. Falls sich in der *Cavity*

ein Photon befindet, so erzeugt das Atom₂ eine Phasenverschiebung um π . Ist hingegen kein Photon im Hohlraum enthalten, bleibt alles unverändert. Damit haben wir drei Quantensysteme miteinander verschränkt. Den resultierenden Atom₁-Atom₂-*Cavity*-Zustand beschreibt die Gleichung

$$|\Psi_{triplet}\rangle = \frac{1}{2} [|e_1\rangle (|i_2\rangle + |g_2\rangle) |0\rangle + |g_1\rangle (|i_2\rangle - |g_2\rangle) |1\rangle] \quad (23)$$

Da beide Atome nur zwei Zustände annehmen können, kann diese Gleichung auch in der Spinsprache notiert werden. Mit

$$\begin{aligned} |+_1\rangle &\equiv |e_1\rangle \\ |-_1\rangle &\equiv |g_1\rangle \\ |\pm_2\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_2\rangle \pm |i_2\rangle) \\ |+_C\rangle &\equiv |0\rangle \\ |-_C\rangle &\equiv |1\rangle \end{aligned}$$

kann die Gleichung (23) zu

$$|\Psi_{triplet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_1, +_2, +_C\rangle - |-_1, -_2, -_C\rangle) \quad (24)$$

umgeformt werden. Darin ist $|\Psi_{triplet}\rangle$ ein Zustand maximaler Verschränkung dreier Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen vom **Greenberger-Horne-Zeilinger**-Typ.

Den eigentlichen „Messpart“ bei dem Experiment übernimmt ein drittes Atom in $|g\rangle$, das eine π -Rabi-Rotation im Ein-Photon-Feld der *Cavity* durchläuft. Der Zeitablauf wird hierbei so gewählt, dass das Atom₃ die *Cavity* vor Atom₁ und Atom₂ verlässt. Abgesehen von einem Phasenunterschied wird der komplette Zustand im Resonator auf dieses dritte Atom projiziert. Der Abbildung 17 entnimmt man die Wahrscheinlichkeiten acht möglicher Ergebnisse. Wie Sie sehen, heben sich zwei von den restlichen ab. In einem idealen Experiment würden $[g_1g_2e_3]$ und $[e_1i_2e_3]$ mit 100%iger Wahrscheinlichkeit gemessen werden, da sie dem eigentlichen GHZ-Typ entsprechen. Tatsächlich beobachtet man nur eine Messwahrscheinlichkeit von $P = 0,54$, da diverse technische Ungenauigkeiten die Ergebnisse verschlechtern. Eine wichtige, nicht vernachlässigbare Fehlerquelle ist beispielsweise das Verschwinden der *Cavity*-Mode während der Eintrittszeit von Atom₁ und Atom₃ ($\Delta t = 100\mu s$). Das beeinflusst die Wahrscheinlichkeit von $[g_1g_2e_3]$ zugunsten anderer $[g_1 \dots]$ -Messungen.

Trotz allem gilt dieser Versuch als großer Fortschritt der Quantenphysik, da er als erster seiner Art drei einzeln adressierbare Atome mit 54%iger Sicherheit kontrolliert verschränkt.

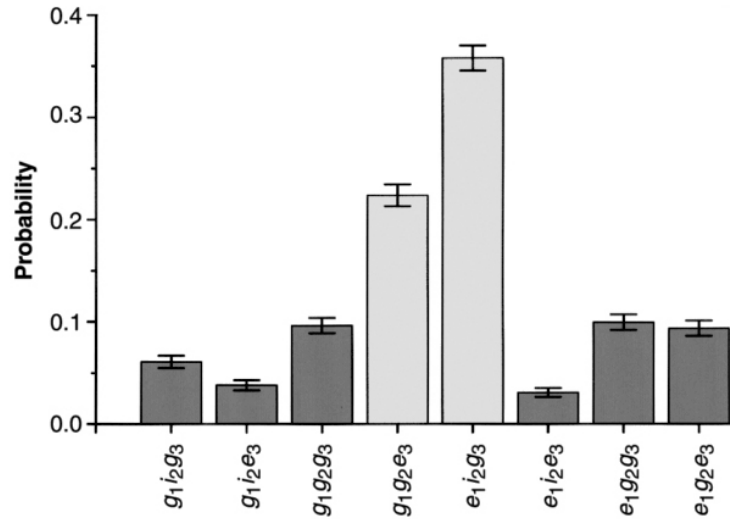


Abbildung 17: Experimentelles Ergebnis. Wahrscheinlichkeitsverteilung der Verschränkung dreier Quantensysteme (longitudinale Korrelationen). [1]

4.4 Weitere Anwendungen der Cavity-QED-Methode

Zusätzlich zu den gerade besprochenen Experimenten gibt es noch eine Reihe weiterer bemerkenswerter Experimente mit dem Hohlraum-Resonator-Aufbau. Man hat sich z.B. auch überlegt, was passiert, wenn die Hohlraummode nicht mehr resonant zu einem Zustandsübergang ist. Hierbei stellte man fest, dass wegen Brechungsindex-Effekten einzelner Rydberg-Atome trotzdem Wechselwirkungen mit Photonen beobachtet werden können. Mit dieser nicht-resonanten Verschränkungsmethode wurden auch schon einige Hauptaspekte des Schrödinger-Katzen-Paradoxons diskutiert und somit wichtige Erkenntnisse über umgebungsbedingte Dekohärenz gewonnen.

5 Zusammenfassung und Fazit

Abschliessend möchte ich Ihnen eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Stationen unseres Gedankengangs geben:

Anfangs lernten Sie den experimentellen Versuchsaufbau im allgemeinen und die einzelnen Komponenten des Aufbaus im besonderen kennen. Danach stellte ich Ihnen den eigentlichen Verschränkungsmechanismus von Rubidium-Atomen und Mikrowellen vor, wobei wir unser Augenmerk vor allem auf die sogenannte Rabi-Oszillation richteten. In diesem Zusammenhang diskutierten wir auch verschiedene Transformationen, die auf ein Atom angewandt werden können (z.B. die π -Rabi-Rotation, die den Zustand des Atoms auf ein Photon abbildet). Anschliessend stellten wir fest, dass mit dem *Cavity*-Aufbau EPR-Paare mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit erzeugt werden können und beschäftigten uns mit zwei Ansätzen zur Realisierung von Quantengattern. Dabei stellte sich unter anderem heraus, dass mit diesen Gattern Photonen detektiert werden können, ohne deren Zustand zu verändern. Zuletzt lernten Sie noch eine Methode kennen, die eine Verschränkung von drei Quantensystemen vom GHZ-Typ erlaubt.

Wie Sie sicherlich erkannt haben, ist die Manipulation von verschränkten Rydberg-Atomen mit Mikrowellen ein durchaus ernst zu nehmender Ansatz für die Entwicklung eines Quantencomputers. Trotz immer wieder auftretender technischer Probleme hat man dennoch viel über die Quantenphysik solcher Systeme gelernt und bereits vorhandenes theoretisches Wissen nun auch experimentell bestätigen können.

Motiviert durch die bisherigen Erfolge mit dieser Technik, plant das französische Team eine Reihe weiterer Projekte, wie z.B.

- den Nichtlokalitätstest von massiven Teilchen,
- die Teleportation von Quantenzuständen,
- die Messung der Wigner-Funktion von nicht-klassischen Feldern (wurde schon ansatzweise bewerkstelligt),
- die Verschränkung zweier *Cavities* mittels Photonen,
- oder die erzwungene Kollision mehrerer Rydberg-Atome zur Erzeugung neuer Formen der Verschränkung.

Wir werden bestimmt noch einiges von diesem experimentellen Ansatz hören...

6 Anhang: Berechnung von P_{g_2} aus Abschnitt 4.2.1

6.1 1. Fall: $|Cavity\rangle = |1\rangle$

Berechnung der Messwahrscheinlichkeit P_{g_2} , für den Fall, dass $Atom_1$ den Photonenzustand $|1\rangle$ präpariert:

1. Zustand zu Beginn des Experimentes:

$$|Atom_1\rangle = |e_1\rangle \text{ und } |Cavity\rangle = |0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi_0\rangle = |e_1, 0\rangle$$

2. $Atom_1$ durchläuft eine π -Rabi-Rotation:

$$|e_1, 0\rangle \mapsto |g_1, 1\rangle$$

Ab jetzt befindet sich ein Photon in der *Cavity* ($|Cavity\rangle = |1\rangle$).

3. $Atom_2$ wird in $|g\rangle$ losgeschickt und wird in R_1 von einem $\frac{\pi}{2}$ -Ramsey-Puls in einen gemischten Zustand transformiert:

$$|Atom_2\rangle = |g_2\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_2\rangle + |i_2\rangle)$$

4. $Atom_2$ fliegt nun durch die *Cavity* bis eine 2π -Rabi-Rotation stattgefunden hat. Die Transformationen der Rabi-Rotation lauten: $|g, 1\rangle \mapsto -|g, 1\rangle$ und $|i, 1\rangle \mapsto |i, 1\rangle$. $|i, 1\rangle$ und $|i, 0\rangle$ werden nicht von der Rabi-Rotation beeinflusst, da die *Cavity* resonant zum $|e\rangle$ - $|g\rangle$ -Übergang ist. Es folgt somit:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|g_2\rangle + |i_2\rangle) |1\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(-|g_2\rangle + |i_2\rangle) |1\rangle$$

5. Nach der Rabi-Rotation wird das $Atom_2$ noch von einem weiteren $\frac{\pi}{2}$ -Ramsey-Puls getroffen. In Abschnitt 2.5 transformierte R_2 folgendermaßen:

$$|g\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + e^{i\phi} |i\rangle) \quad , \quad |i\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{-i\phi} |g\rangle + |i\rangle)$$

Demnach folgt für das $Atom_2$:

$$|Atom_2, Cavity\rangle \equiv |\Psi\rangle = \left(-\frac{1}{2}|g_2\rangle - \frac{1}{2}e^{i\phi}|i_2\rangle - \frac{1}{2}e^{-i\phi}|g_2\rangle + \frac{1}{2}|i_2\rangle \right) |1\rangle \quad (25)$$

6. Zuletzt soll noch die Messwahrscheinlichkeit P_{g_2} berechnet werden. Zunächst gilt

$$P_{g_2} = \sum_{n=0}^1 |\langle n | \langle g_2 | \Psi \rangle|^2 \quad (26)$$

wobei $n \equiv$ Photonenzahl. Da wir aber sicher davon ausgehen können, dass sich ein Photon im Resonator befindet, kann die Summe weggelassen werden und es folgt

$$\begin{aligned}
P_{g_2} &= |\langle 1 | \langle g_2 | \Psi \rangle|^2 \\
&\stackrel{\text{mit (25)}}{=} \left| \langle g_2 | \left(-\frac{1}{2} |g_2\rangle - \frac{1}{2} e^{i\phi} |i_2\rangle - \frac{1}{2} e^{-i\phi} |g_2\rangle + \frac{1}{2} |i_2\rangle \right) \langle 1 | 1 \rangle \right|^2 \\
&= \left| \left(-\frac{1}{2} \underbrace{\langle g_2 | g_2 \rangle}_{=1} - \frac{1}{2} e^{i\phi} \underbrace{\langle g_2 | i_2 \rangle}_{=0} - \frac{1}{2} e^{-i\phi} \underbrace{\langle g_2 | g_2 \rangle}_{=1} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle g_2 | i_2 \rangle}_{=0} \right) \underbrace{\langle 1 | 1 \rangle}_{=1} \right|^2 \\
&= \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-i\phi} \right|^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-i\phi} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\phi} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \\
&= \frac{1}{2} (1 + \cos \phi) = \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)
\end{aligned}$$

Bemerkung zu $\langle g | i \rangle = 0$: Da beide Zustandsvektoren im Hilbertraum senkrecht zueinander sind, ergibt das Skalarprodukt Null.

6.2 2. Fall: $|Cavity\rangle = |0\rangle$

Im Gegensatz zum ersten Fall ist nun die *Cavity* leer, d.h. $|Cavity\rangle = |0\rangle$:

1. Wiederum wird Atom₂ in $|g\rangle$ losgeschickt und in R_1 von einem $\frac{\pi}{2}$ -Ramsey-Puls in einen gemischten Zustand transformiert:

$$|Atom_2\rangle = |g_2\rangle \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_2\rangle + |i_2\rangle)$$

2. Danach fliegt Atom₂ durch den Hohlraumresonator bis eine 2π -Rabi-Rotation stattgefunden hat. Es findet jedoch keine Transformation statt, da der Zustand $|g, 0\rangle$ nicht beeinflusst wird.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|g_2\rangle + |i_2\rangle) |0\rangle \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_2\rangle + |i_2\rangle) |0\rangle$$

3. Nach dem $\frac{\pi}{2}$ -Ramsey-Puls in R_2 folgt für den Zustand des Systems

$$|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{2} |g_2\rangle + \frac{1}{2} e^{i\phi} |i_2\rangle - \frac{1}{2} e^{-i\phi} |g_2\rangle + \frac{1}{2} |i_2\rangle \right) |0\rangle$$

4. Für die Messwahrscheinlichkeit P_{g_2} folgt analog zum ersten Fall

$$\begin{aligned} P_{g_2} &= |\langle 0 | \langle g_2 | \Psi \rangle|^2 \\ &= \left| \langle g_2 | \left(\frac{1}{2} |g_2\rangle + \frac{1}{2} e^{i\phi} |i_2\rangle - \frac{1}{2} e^{-i\phi} |g_2\rangle + \frac{1}{2} |i_2\rangle \right) \langle 0 | 0 \rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-i\phi} \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-i\phi} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{i\phi} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos \phi) = \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \end{aligned}$$

Literatur

- [1] Raimond, J. M., M. Brune, and S. Haroche, 2001, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565
- [2] Maître, X., E. Hagley, G. Nogues, C. Wunderlich, P. Goy, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, 1997, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 769
- [3] Rauschenbeutel, A., G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, 1999, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5166
- [4] Internet-Homepage von J. M. Raimond,
<http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/english/englishframes.html>
- [5] Demtröder, Wolfgang: *Laserspektroskopie*; 3. Auflage - Berlin: Springer, 1993
- [6] Briegel, H.-J., I. Cirac, and P. Zoller, 1999, *Phys. Blätter* **55** Nr. 9, 37
- [7] Neil W. Ashcroft, N. David Mermin: *Festkörperphysik*; Übersetzung von Dr. Jochen Greß; München / Wien: R. Oldenbourg Verlag, 2001